7/3/2018

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $(G, *)$ ομάδα. Τότε:

α) Αν $g, h \in G$ ισχύει $(g*h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ (Τύπος αντιστρόφου γινομένου)

β) Αν $g, h \in G$ η εξίσωση, για $x \in G$

$g*x=h$ έχει μοναδική λύση $x = g^{-1} * h$

c) Αν $g,h \in G$ η εξίσωση για $x \in G$ $\quad x*g=h$

έχει μοναδική λύση $x=h*g^{-1}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> a) $(g*h)*(h^{-1}*g^{-1}) = g*(h*h^{-1})*g^{-1} = g*e*g^{-1}$

ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

$= g*g^{-1} = e$

Ομοίως $(h^{-1}*g^{-1})*(g*h) = h^{-1}*(g^{-1}*g)*h = h^{-1}*e*h$

$= h^{-1}*h = e$ όπου $e \in G$ το ουδέτερο

b) Έστω $x = g^{-1}*h$. Τότε $g*(g^{-1}*h) \overset{\text{προσ.}}{=} (g*g^{-1})*h =$

$e*h = h$. Άρα $g^{-1}*h$ λύση της εξίσωσης.

Αντίστροφα, αν $x \in G$ με $g*x=h \Longrightarrow$

$g^{-1}*(g*x) = g^{-1}*h \overset{\text{προσ.}}{\Longrightarrow} (g^{-1}*g)*x = g^{-1}*h \Longrightarrow$

$e*x = g^{-1}*h \Longrightarrow x = g^{-1}*h$

c) Αποδεικνύεται όμοια με το b)

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u> Έστω $(G,*)$ ομάδα και $g \in G$.

Ορίζουμε $l_g : G \to G$, $l_g(h) = h*g$ για κάθε $h \in G$

και $r_g : G \to G$ με $r_g(h) = g*h$, για κάθε $h \in G$

Τότε l_g, r_g 1-1 και επί.

$l \leftarrow$ left translation

$r \leftarrow$ right

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$r_g(h) = r_g(h') \Rightarrow g*h = g*h' \Rightarrow$$

$$g^{-1}*g*h = g^{-1}*g*h' \Rightarrow e*h = e*h' \Rightarrow h = h'$$

Άρα r_g 1-1.

Έστω $a \in G$. Για $h = g^{-1}*a \in G$ έχουμε

$$r_g(h) = g*(g^{-1}*a) = (g*g^{-1})*a = e*a = a$$

Συνεπώς, r_g ΕΠΙ. Άρα r_g 1-1 και ΕΠΙ.

Παρόμοια Αποδειξη ότι l_g 1-1 και ΕΠΙ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η συνάρτηση $r_g: G \to G$ λέγεται δεξιά μεταφορά κατά g ενώ η συνάρτηση $l_g: G \to G$ λέγεται αριστερή μεταφορά κατά g.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω $G = (\mathbb{R}, +)$ και $g \in G = \mathbb{R}$

Ποιες είναι οι συναρτήσεις $l_g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $r_g: G \to G$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ. $l_g(a) = a+g$, $r_g(a) = g+a$

Άρα π.χ. αν $g=5$ $l_g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l_g(a) = a+5$
και ομοίως $r_g(a) = a+5$

Δύναμη Στοιχείου

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $(G,*)$ ομάδα, $n \in \mathbb{Z}$ και $g \in G$

Θα ορίσουμε το στοιχείο $g^n \in G$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 $n=0$ Ορίζουμε $g^0 = e$, όπου e το ουδέτερο της G.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 $n>0$ Ορίζουμε $g^n = \underbrace{g*g*\dots*g}_{n-\text{φορές}}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 $n<0$. Ορίζουμε $g^n = (g^{-1})^{|n|}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Με άλλα λόγια για $n<0$

$$g^n = \underbrace{g^{-1} * g^{-1} * \dots * g^{-1}}_{|n| \text{ φορές}}.$$

$(\mathbb{R}, \cdot)$: όχι ομάδα $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: ομάδα.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $(G, *)$ ομάδα, $a \in G$
$n, m \in \mathbb{Z}$. Τότε $(a^n) * (a^m) = a^{n+m}$
Επίσης $(a^{-1})^n = a^{-n}$ και πιο γενικά
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ (Παρατήρηση, το a^{-1} είναι το αντίστροφο του a, ως προς το $*$. Ταυτόχρονα η ύψωση του a στην δύναμη $-1 \in \mathbb{Z}$.)
γιατί εξ ορισμού η ύψωση του a στην δύναμη -1 είναι ο αντίστροφος του a στην G ως προς $*$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ειδική περίπτωση $n, m > 0$ (Η γενική περίπτωση παρόμοια)
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1. $(a^n) * (a^m) = a^{n+m}$

Με επαγωγή στο m. Για $m = 1$ $a^n * a = (\underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-φορές}}) * a =$

$\underbrace{a * \dots * a}_{n+1 \text{ φορές}} = a^{n+1}$

Έστω $m > 0$ και ισχύει $a^n * a^m = a^{n+m}$
Τότε $(a^n) * (a^{m+1}) = a^n * (\underbrace{a * \dots * a}_{m+1 \text{ φορές}}) = (a^n * \underbrace{a * \dots * a * a}_{m+1 \text{ φορές}})$

$= \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-φορές}} * \underbrace{a * \dots * a}_{m+1\text{-φορές}} = a^{n+m+1}$.

Παρόμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Έστω $G = GL_2(\mathbb{R})$ η ομάδα των αντιστρέψιμων 2×2 πραγματικών πινάκων και $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$

Υπολογίστε τους πίνακες A^0, A^2, A^{-2}.

<u>ΛΥΣΗ</u> Εξ ορισμού A^0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της G, άρα $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^2 = A \cdot A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εξ ορισμού $A^{-2} = (A^{-1})^{|2|} = A^{-1} \cdot A^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Έστω $(G, *)$ ομάδα $a \in G$. Ποιος είναι ο αντίστροφος του a^{-1};

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>: Ο a, γιατί $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Με άλλα λόγια $(a^{-1})^{-1} = a$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $(G, *)$ ομάδα, $a \in G$, n ακέραιος με $n > 0$. Τότε τα στοιχεία a^n και a^{-n} είναι αντίστροφα.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> 1ος τρ. $a^n * (a^{-n}) = (\underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-φορές}}) * (\underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{n\text{-φορές}}) = e$

και ομοίως $(a^{-n}) * (a^n) = (\underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{n\text{-φορές}}) * (\underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-φορές}}) = e$

2ος τρόπος: Ξέρουμε από την Πρόταση ότι για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ $a^{k_1} * a^{k_2} = a^{k_1 + k_2}$

Συνεπώς, $(a^n) * (a^{-n}) = a^{n+(-n)} = a^0 = e$ και
$(a^{-n}) * (a^n) = a^{-n+n} = a^0 = e$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(G,*)$ ομάδα και $a,b \in G$

Αν $a*b=e$ τότε και $b*a=e$, άρα το b είναι αντίστροφο του a, άρα $b=a^{-1}$.

Ομοίως αν $b*a=e$ τότε και $a*b=e$, άρα $b=a^{-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε $a*b=e$. Αφού G ομάδα

Υπάρχει το a^{-1} και $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$

Άρα $a^{-1} = a^{-1}*e = a^{-1}*(a*b) = (a^{-1}*a)*b = e*b = b$

Ομοίως και η άλλη περίπτωση.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(G,*)$ ομάδα, $a \in G$. Θέτουμε

$H = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \dots\}$

Τότε a) Αν $h_1, h_2 \in H$, τότε $h_1 * h_2 \in H$

b) Το $(H, *')$ όπου $*'$ ο περιορισμός του $*$ σο H είναι μεταθετική ομάδα.

Το H ονομάζεται: Η κυκλική υποομάδα της G που παράγεται από το a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. a) Αφού $h_1, h_2 \in H$, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $h_1 = a^{k_1}$ και $h_2 = a^{k_2}$

Από την πρόταση $h_1 * h_2 = a^{k_1} * a^{k_2} = a^{k_1+k_2} \in H$

b) Από το a) ο $*'$ πράξη στο H.

· $*'$ προσεταιριστικός σαν περιορισμός του προσεταιριστικού $*$

· ουδέτερο του $*'$ είναι το $e = a^0 \in H$.

· Έστω $h \in H$. Υπάρχει αντίστροφο ως προς την $*'$ του h στο H.

Αφού $h \in H$, υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $h = a^k$.

Θέτουμε $g = a^{-k} \in H$. Τότε $g*h = a^{-k} * a^k = a^{-k+k} =$

$a^0 = e$ και $h*g = (a^k)*(a^{-k}) = a^{k+(-k)} = a^0 = e$.

Άρα το h έχει αντίστροφο ως προς την $*'$ στο H. Το $g = a^{-k}$. Συνεπώς $(H,*')$ ομάδα.

Τώρα θα δείξουμε Η μεταθετική. Έστω $h_1, h_2 \in H$. υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $h_1 = a^{k_1}$, $h_2 = a^{k_2}$. Τότε

$$h_1 * h_2 = a^{k_1} * a^{k_2} \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} a^{k_1+k_2} = a^{k_2+k_1} = a^{k_2} * a^{k_1} = h_2 * h_1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Έστω $(G,*)$ ομάδα και $a=e$ το ταυτοτικό. Τότε $e^{-1}=e$, γιατί $e*e=e$.
Επίσης για $n=0$ $e^0=e$
Για $n>0$ $e^n = e*\underbrace{e*\cdots*e}_{n\text{-φορές}} = e$

Για $n<0$ $e^n = e^{-1}*\underbrace{e^{-1}*\cdots*e^{-1}}_{|n|\text{-φορές}} = \underbrace{e*\cdots*e}_{|n|\text{φορές}} = e$.

Συμπέρασμα $e^k=e$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $(G,*)$ ομάδα και Η υποσύνολο της G. Το Η λέγεται υποομάδα της G αν
a) Αν $h_1, h_2 \in H$ τότε $h_1 * h_2 \in H$ και
b) Το Η με τον περιορισμό του $*$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα. Αν $a \in G$ είδαμε ότι το $H = \{a^k : k\in\mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα της G.

Παράδειγμα. Το $(\mathbb{Z},+)$ υποομάδα του $(\mathbb{R},+)$ γιατί
a) Αν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ τότε $k_1+k_2 \in \mathbb{Z}$
b) Το $(\mathbb{Z},+)$ ομάδα.
Ομοίως $(\mathbb{Z},+)$ υποομάδα του $(\mathbb{Q},+)$ και $(\mathbb{Q},+)$ υποομάδα του $(\mathbb{R},+)$ και $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ υποομάδα του $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θέτουμε $H = \{a\in\mathbb{R} : a>0\}$. Τότε $(H,\cdot)$ υποομάδα του $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.